SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Ermanno Lanconelli

UN TEOREMA DI NON ESISTENZA SU SEMISPAZI PER UN PROBLEMA SEMILINEARE CON CRESCITA CRITICA SUL GRUPPO DI HEISENBERG

13 febbraio 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Presentiamo un teorema di non esistenza di soluzioni per un problema al contorno relativo a un'equazione semilineare con crescita critica su un semispazio del gruppo di Heisenberg.

Summary. We give a non existence theorem for boundary value problems on unbounded domains related to a semilinear equation with critical exponent on the Heisenberg group.

UN TEOREMA DI NON ESISTENZA PER PROBLEMI SEMILINEARI CON CRESCITA CRITICA SU SEMISPAZI DEL GRUPPO DI HEISENBERG

E. LANCONELLI*

Sunto. Presentiamo un teorema di non esistenza di soluzioni positive per un problema al contorno relativo a un' equazione semilineare con crescita critica su un semispazio del gruppo di Heisenberg.

1. Teorema di non esistenza e sua motivazione. Il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ é l'operatore differenziale

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2)$$

dove, per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j \partial_t, \quad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j \partial_t.$$

Qui $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$ indica il punto di $\mathbb{R}^{2n+1}$. Useremo anche la notazione $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (x, y)$, $\xi = (z, t)$.

$\mathbb{H}^n$ é il gruppo di Lie $(\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$ con legge di composizione interna definita nel modo seguente:

$$(z, t) \circ (z', t') = (z + z', t + t' + 2\Im(z \cdot z'))$$

Qui $z \cdot z'$ indica il prodotto interno in $\mathbb{C}^n$ di z e z'.

$\Delta_{\mathbb{H}^n}$ é invariante rispetto alle traslazioni a sinistra su $\mathbb{H}^n$ ed é di ordine 2 rispetto alle dilatazioni

$$\delta_\lambda : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n, \quad \delta_\lambda(z, t) = (\lambda z, \lambda^2 t).$$

Il determinante Jacobiano di δ_λ é λ^{2n+2} e il numero naturale

$$Q = 2n + 2$$

viene chiamato dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$.

Nello studio del problema di Yamabe sulle varietá complesse di Cauchy-Riemann, si presentano equazioni semilineari del tipo seguente

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} \tag{1.1}$$

L'esponente $(Q + 2)/(Q - 2)$ é critico per il Laplaciano di Kohn in $\mathbb{H}^n$ così come $(N + 2)/(N - 2)$ é critico per il Laplaciano classico in $\mathbb{R}^n$. Per precisare questa affermazione é necessario premettere ulteriori notazioni e richiamare alcuni risultati.

Indichiamo con $\nabla_{\mathbb{H}^n}$ il gradiente di Heisenberg

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} := (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

*I risultati che esporremo sono stati ottenuti in collaborazione col Dr. Francesco Uguzzoni.

La disuguaglianza di tipo Sobolev

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2 \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n) \tag{1.2}$$

vale se e solo se

$$p = \frac{2Q}{Q-2} =: 2^*.$$

Osserviamo subito che l'esponente $(Q+2)/(Q-2)$ in (1.1) é esattamente $2^* - 1$.

Se Ω é un aperto, limitato o no, di $\mathbb{H}^n$ denotiamo con $S_0^1(\Omega)$ lo spazio di Sobolev-Stein ottenuto per completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma

$$u \mapsto \|\nabla_{\mathbb{H}^n} u\|_2$$

L'immersione

$$S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \Omega \text{ limitato},$$

é continua per $1 \leq p \leq 2^*$ ed é compatta solo per $1 \leq p < 2^*$ (Cfr. Folland e Stein [FS]; si veda anche Garofalo e Lanconelli [GL]). Una funzione non negativa u si dice soluzione debole del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = u^m & \text{in } \Omega \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad 1 \leq m \leq \frac{Q+2}{Q-2} \tag{1.3}$$

se

$$\int_\Omega \nabla_{\mathbb{H}^n} u \cdot \nabla_{\mathbb{H}^n} h = \int_\Omega u^m h \qquad \forall h \in S_0^1(\Omega).$$

La disuguaglianza di immersione (1.2) assicura che la funzione $u^m h$ é sommabile in Ω per ogni $u, h \in S_0^1(\Omega)$, qualunque sia $m \leq (Q+2)/(Q-2)$.

Le soluzioni deboli di (1.3) sono i punti critici del funzionale

$$I : S_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 - \frac{1}{m+1}\int_\Omega u^{m+1}. \tag{1.4}$$

Utilizzando collaudate tecniche di teoria variazionale dei punti critici, in [GL] é stato dimostrato che il problema (1.3) ha (almeno) una soluzione positiva se

$$1 < m < \frac{Q+2}{Q-2}.$$

Questo risultato é ottimale nel senso seguente. Se $m = (Q+2)/(Q-2)$ il problema (1.3) non ha soluzione se $\partial\Omega$ e u sono abbastanza regolari e se Ω é δ_λ-stellato rispetto all'origine, cioé se risulta

$$\delta_\lambda(\xi) \in \Omega \qquad \forall \xi \in \Omega$$

([GL], Teorema 2.2). Mediante tecniche piú sofisticate, introdotte da Brezis e Nirenberg nel caso del Laplaciano classico, Citti ha dimostrato che nel caso critico ($m = (Q+2)/(Q-2)$) il problema (1.3) "acquista" soluzione se si perturba opportunamente il termine semilineare nell'equazione. Il risultato di Citti [C] é il seguente:

Il problema

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} + f(\xi,u) \qquad u \in S_0^1(\Omega)$$

ha almeno una soluzione non negativa e non banale se Ω *é limitato e se*

$$f(\xi,t) = O(t^r) \quad \text{per } t \to \infty, f(\xi,t) = O(t) \quad \text{per } t \to 0, \quad 0 \le f(\xi,t) \not\equiv 0$$

$$1 < r < \frac{Q+2}{Q-2}.$$

Sottolineamo esplicitamente che il Teorema di Citti vale qualunque sia Ω limitato. D'altra parte, giá nel lavoro [GL], avevamo dimostrato che il problema con esponente critico, e senza termini perturbativi nell'equazione, ha soluzioni non negative non banali in aperti cilindrico-annulari del tipo seguente

$$\{(z,t) \in \mathbb{H}^n \quad / \quad r < |z| < R, 0 < t < T\}, \quad r, R, T > 0.$$

Anche una "perturbazione" della geometria di Ω puó quindi produrre risultati di esistenza nel caso critico. Questo aspetto del problema, tuttavia, presenta difficoltá molto elevate. Per comprenderle, é opportuno ricordare che la ricerca di punti critici del funzionale I, e quindi di soluzioni deboli del problema (1.3), viene di solito ricondotta alla ricerca dei livelli critici dello stesso funzionale. Un livello critico di I é, per definizione, un numero reale c per il quale esiste una funzione $u \in S_0^1(\Omega)$ tale che

$$I(u) = c, \quad dI(u) = 0.$$

Ora, é sempre facile, anche nel caso critico, determinare *livelli critici asintotici* di I, chiamando livello critico asintotico ogni numero reale c per il quale esiste una successione (u_k) in $S_0^1(\Omega)$ tale che

$$I(u_k) \to c, \quad dI(u_k) \to 0. \tag{1.5}$$

Ogni successione verificante (1.5) si chiama, come noto, successione di Palais-Smale di I al livello c. Ovviamente, ogni livello critico é livello critico asintotico, ma in generale vale il viceversa soltanto se le successioni di Palais-Smale di I sono compatte. Infatti, se così fosse, da ogni successione verificante (1.5) si potrebbe estrarre una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente ad una funzione $u \in S_0^1(\Omega)$. Ne verrebbe

$$I(u) = \lim_k I(u_{h_k}) = c, \quad dI(u) = \lim_k dI(u_{h_k}) = 0$$

e quindi c sarebbe un livello critico effettivo.

Come conseguenza della compattezza dell'immersione di Sobelev-Stein

$$S_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{per} \quad p < \frac{Q+2}{Q-2} + 1 = \frac{2Q}{Q-2},$$

nel caso sottocritico, $m < (Q+2)/(Q-2)$, ogni successione di Palais-Smale di I é compatta. Questo non succede nel caso critico $m = (Q+2)/Q-2)$. Prendiamo infatti la funzione

$$U : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R} \quad U(z,t) = \frac{c_0}{((1+|z|^2)^2 + t^2)^{\frac{Q-2}{4}}}. \tag{1.6}$$

Una facile verifica diretta consente di riconoscere che esiste una costante c_0 tale che

$$-\Delta U = U^{\frac{Q+2}{Q-2}}$$

e quindi $dI^* = 0$. Qui I^* indica il funzionale in (1.4) con $m = 2^* - 1$ e $\Omega = \mathbb{H}^n$. Supponiamo ora, per semplicitá, che Ω contenga l'origine e scegliamo una funzione $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ identicamente uguale a 1 in un intorno di zero. Allora, posto

$$u_k(z,t) = \phi(z,t) k^{\frac{Q-2}{2}} U(kz, k^2 t)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta $u_k \in S_0^1(\Omega)$,

$$I(u_k) \to I^*(U) = c^* > 0$$

$$dI(u_k) \to dI^*(U) = 0.$$

La successione (u_k) é quindi di Palais-Smale al livello c^* ma non é compatta in quanto $u_k(\xi) \to 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{H}^n$ mentre $I(u_k) \to c^* > 0$.

La funzione U é quindi (una) responsabile della mancanza di compattezza delle successioni di Palais-Smale di I. A parte quelle che possono ottenersi da U per dilatazioni e traslazioni sulle variabili, possiamo chiederci

(P) **vi sono altre funzioni che fanno perdere compattezza ?**

Se la risposta a questa domanda fosse negativa allora, come ha mostrato Citti ancora in [C], la perdita di compattezza delle successioni di Palais-Smale del funzionale I si avrebbe soltanto ai livelli

$$c_h^* = hc^*, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Questo risultato consentirebbe di estendere al gruppo di Heisenberg e al Laplaciano di Kohn una notevole tecnica di carattere algebrico-topologico, introdotta da Bhari e Coron per il Laplaciano classico in $\mathbb{R}^N$, e che ha loro consentito di ottenere il seguente profondo risultato: *se Ω é un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che il gruppo di omologia H_ν é non banale, allora il problema semilineare*

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} \\ u\,|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

ha almeno una soluzione positiva in Ω [BC]. Qui Δ indica il Laplaciano classico. Osserviamo che $(N+2)/(N-2) = 2N/(N-2) - 1$ é l'esponente critico per Δ in quanto l'immersione classica di Sobolev

$$W_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$$

é continua ma non compatta. Ricordiamo anche che (1.8) non ha soluzione se Ω é stellato rispetto alle dilatazioni euclidee (Pohozaev [P]).

Il teorema di Bahri e Coron porta naturalmente a cercare una risposta, che si spera negativa, alla domanda **(P)**. D'altra parte, per citare completamente il risultato di Citti, la perdita di compattezza delle successioni di Palais-Smale di I, oltre che dalla

funzione U in (1.6), puó essere provocata anche, e soltanto, da eventuali soluzioni positive del problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} & \text{in } \Pi \\ u \in S_0^1(\Pi) \end{cases} \tag{1.9}$$

ove Π é un qualunque semispazio di $\mathbb{H}^n$. La domanda (**P**), pertanto, avrebbe la desiderata risposta negativa se, per ogni semispazio Π il problema (1.9) non avesse soluzioni positive. In realtá, data l'invarianza dell'equazione in (1.9) rispetto alle traslazioni a sinistra su $\mathbb{H}^n$ e alle rotazioni attorno l'asse t, basterebbe provare il teorema di non esistenza per i due soli semispazi

$$\Pi_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \ / \ x_1 > 0\} \tag{1.10}$$

e

$$\Pi_0 = \{(z,t) \, / \, t > 0\}. \tag{1.11}$$

Lo scopo di questa nota é quello di annunciare il risultato per il semispazio Π_1.

TEOREMA 1.1. *Se $u \in S_0^1(\Pi)$ é una soluzione debole non negativa del problema (1.9), con $\Pi = \Pi_1$, allora $u \equiv 0$.*

Non siamo ancora capaci di riconoscere se questo risultato vale per il semispazio Π_0. La dimostrazione del Teorema 1.1 ha presentato difficoltá inaspettate e di gran lunga superiori a quelle dell'analogo teorema per il Laplaciano classico, dimostrato da Esteban e Lions in [EL]. In quest'ultima nota, gli autori provano teoremi di non esistenza scrivendo dapprima una identitá integrale di tipo Rellich-Pohozaev per le soluzioni non negative u del problema di Dirichlet relativo ad equazioni di Poisson semilineari su aperti illimitati. Da questa identitá segue facilmente che deve essere $u \equiv 0$, purché le derivate prime di u siano di quadrato sommabile. Quest'ultima informazione si ha gratuitamente se u appartiene al suo naturale spazio di Sobolev.

Identitá integrali analoghe a quelle di Esteban e Lions valgono anche per le soluzioni non negative del problema (1.9), come abbiamo mostrato con Garofalo in [GL]. Tuttavia, per poter dedurre da quelle indentitá il desiderato annullamento di u, é pressocché necessario sapere che risulta

$$\partial_t u \in L^2(\Pi_1). \tag{1.12}$$

D'altra parte, a differenza di quanto accade nel caso del Laplaciano classico e del corrispondente ordinario spazio di Sobolev, l'apparteneza di u a S_0^1 non garantisce la (1.12) in quanto, essendo ∂_t di ordine 2 rispetto alle naturali dilatazioni su $\mathbb{H}^n$, la derivata $\partial_t u$ nel contesto del gruppo di Heisenberg "pesa" come una derivata seconda, e la sua sommabilitá quadratica, in particolare, non segue dalla semplice appartenenza allo spazio di Sobolev-Stein S_0^1 . Tutta la difficoltá del problema sta qui.

2. Schema della dimostrazione del Teorema 1.1. I punti essenziali della dimostrazione sono tre.

(*I*) Se Π é un qualunque semispazio di $\mathbb{H}^n$ e se $u \in S_0^1(\Pi)$ é una soluzione non negativa di

$$-\Delta u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} \tag{2.1}$$

allora

$$u \in L^p(\Pi) \quad \forall p \in \left]\frac{Q}{Q-2}, +\infty\right]$$

e

$$u(\xi) \to 0 \quad \text{per} \quad \xi \to \infty.$$

Inoltre u é globalmente holderiana in Π_1 nel senso seguente: esistono $\alpha < 1$ e $c > 0$ tali che

$$|u(\xi') - u(\xi)| \leq c(d(\xi', \xi))^\alpha$$

ove $d(\xi', \xi) = |\xi^{-1} \circ \xi'|$ e

$$|(z,t)| = (|z|^4 + t^2)^{\frac{1}{4}}.$$

La dimostrazione di questi risultati si ottiene mediante due tipi di procedimenti iterativi modellati su quelli introdotti da Moser, per le equazioni ellittiche, e da Brézis e Kato per le equazioni di tipo Schrödinger stazionario. La difficoltá principale, e piú nuova, consiste nel provare che $u \in L^p$ per

$$\frac{Q}{Q-2} < p < \frac{2Q}{Q-2}.$$

(II). Se Π é un qualunque semispazio di $\mathbb{H}^n$ e se $u \in S_0^1(\Pi)$ é una soluzione non negativa di (2.1), allora esiste una costante $c > 0$ tale che

$$u(\xi) \leq cU(\xi) \quad \forall \xi \in \Pi. \tag{2.2}$$

U é la soluzione positiva di (2.1) su tutto $\mathbb{R}^n$ definita in (1.6).

La dimostrazione di (2.2) utilizza una tecnica parzialmente ispirata a quella usata in [CGL] per dimostrare la disuguaglianza di Harnack per equazioni di tipo Schrödinger relative ad operatori "somma di quadrati". Il procedimento si basa sull'uso di una formula di rappresentazione del tipo seguente

$$\omega(\xi) = (M_r\omega)(\xi) - N_r(\Delta\omega) \tag{2.3}$$

ove M_r e N_r sono opportuni operatori *integrali lineari* aventi *nucleo non negativo* e col *supporto nel disco*

$$B_d(\xi, r) = \{\xi' \in \mathbb{H}^n \mid d(\xi, \xi') < r\}$$

Presa la soluzione u di (2.1) la si prolunga con lo zero fuori da Π_1 e si definisce

$$w(\xi) := \int_{\mathbb{H}^n} \Gamma(\xi, \xi')(u(\xi'))^{\frac{Q+2}{Q-2}} d\xi', \quad \Gamma = \text{sol. f.le di } \Delta_{\mathbb{H}^n}.$$

Poiché u é holderiana e nulla su $\partial\Pi_1$, la funzione w é soluzione classica dell'equazione

$$-\Delta w = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} \tag{2.4}$$

Inoltre w tende a zero all'infinito ed é strettamente positiva su tutto $\mathbb{H}^n$. In particolare, se si pone

(2.5) $$v = w - u$$

risulta

$$\Delta v = 0 \quad \text{in} \quad \Pi, \quad v = w \quad \text{su} \quad \partial\Pi, \quad v(\xi) \to 0 \quad \text{per} \quad \xi \to \infty.$$

Allora, per il principio del massimo, $v \geq 0$. In altri termini

(2.6) $$0 \leq u \leq w \quad \text{in} \quad \Pi_1$$

Fissato $r > 0$ dalla formula di rappresentazione (2.3) e dalla (2.4) si ottiene

$$w = M_r(w) + N_r\left(u^{\frac{Q+2}{Q-2}}\right)$$

e quindi, per la (2.6),

(2.7) $$w \leq M_r(w) + N_r\left(w^{\frac{Q+2}{Q-2}}\right).$$

L'idea della dimostrazione, grosso modo, consiste nel reiterare la stima (2.7) sostituendo la w al secondo membro con la funzione $M_r(w) + N_r(w^{\frac{Q+2}{Q-2}})$. Si ottiene in questo modo la stima

(2.8) $$w \leq cU$$

dalla quale, per la (2.6), segue la (2.2).

(III) In quest'ultima parte della dimostrazione é essenziale richiedere che sia $\Pi = \Pi_1$. Essendo $u = 0$ su $\partial\Pi_1$ risulta

$$\partial_t u \in C^\infty(\bar{\Pi}_1), \quad \partial_t u\,|_{\partial\Pi_1} = 0.$$

Qui abbiamo anche utilizzato il fatto che $\partial\Pi_1$ non contiene punti caratteristici per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$. Vogliamo dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

(2.9) $$|\partial_t u| \leq cU$$

Da questa stima e dalle identitá integrali dimostrate in [GL] si ottiene direttamente che é

$$u \equiv 0$$

come si voleva dimostrare.

Utilizziamo la notazione del precedente punto *(II)*. Dalla definizione di w e dalla (2.8) si deduce anzitutto che

(2.10) $$|\partial_t w| \leq cU$$

Per dimostrare (2.9) basta allora riconoscere che

(2.11) $$|\partial_t v| \leq cU.$$

Poiché ∂_t commuta con $\Delta_{\mathbf{H}^n}$

$$\Delta_{\mathbf{H}^n}(\partial_t v) = \partial_t(\Delta_{\mathbf{H}^n} v) = 0.$$

Inoltre, essendo $\partial_t u = 0$ su $\partial\Pi_1$,

$$\partial_t v \mid_{\partial\Pi_1} = \partial_t w \mid_{\partial\Pi_1} =: f_0.$$

La funzione $h = \partial_t v$ verifica quindi il problema al contorno

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{H}^n} h = 0 \\ h \mid_{\partial\Pi_1} = f_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Non disponendo di formule di rappresentazione del tipo "nucleo di Poisson per le funzioni armoniche in semispazi" noi abbiamo rappresentato la soluzione di (2.12) come punto fisso di un operatore di media modellato sulla geometria di Π_1. Per ogni $\xi = (x_1, \ldots) \in \Pi_1$ poniamo

$$r(\xi) = \frac{x_1}{2}$$

e, per $\omega \in L^1_{loc}(\Pi_1)$ definiamo

$$T(\omega)(\xi) = (M_{r(\xi)}\omega)(\xi).$$

Qui M_r indica l'operatore di media che figura al secondo membro della (2.3). Si riconosce, in modo del del tutto standard, che valgono le seguenti affermazioni.

(i) T é monotono
(ii) i punti fissi di T nulli all'infinito e sul bordo di Π_1 sono nulli
(iii) $\Delta w \leq 0 \quad \Rightarrow \quad T(\omega) \leq \omega$
(iv) T commuta con l'operatore di derivazione ∂_t.

Da queste proprietá di T, e dal fatto che

$$\Delta u = -u^{\frac{Q+2}{Q-2}} \leq 0$$

segue: esiste una funzione $h \in C(\Pi)$ tale che

$$T^k u \searrow h, \quad 0 \leq h \leq u, \quad Th = h.$$

Qui T^k indica l'iterata di ordine k di T.

In particolare, essendo u nulla su $\partial\Pi_1$ e all'infinito, tale risulta anche h e quindi, per la proprietá (ii) di T, $h = 0$. Allora, poiché v é armonica in Π_1

$$T^k w = T^k u + T^k v = T^k u + v \ \searrow \ v. \tag{2.13}$$

Da questa, poiché T commuta con ∂_t, segue facilmente che

$$T^k(\partial_t w) \overset{deb}{\to} \partial_t v. \tag{2.14}$$

D'altra parte, per la stima (2.10)

$$-cU \leq \partial_t w \leq cU$$

e, poiché $-\Delta U > 0, T^k U \leq U$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, per la (2.14),

$$\left| \int_{\mathbb{H}^n} \psi \partial_t v \right| \leq c \int_{\mathbb{H}^n} |\psi| U \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Pi_1).$$

Questo prova la (2.11) e conclude la dimostrazione del teorema.

Bibliografia

[BC] A. Bahari - J.M. Coron, *On a linear elliptic equation involving the critical exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988).

[C] G. Citti, *Semilinear Dirichlet problem involving critical exponent for the Kohn Laplacian*, Ann. Mat. Pura Appl. 169 (1995).

[CGL] G. Citti - N. Garofalo - E. Lanconelli, *Harnack's inequality for sum of squares of vector fields plus a potential*, Amer. J. Math. 115 (1993).

[EL] M.J. Esteban - P. L. Lions, *Existence and non existence results for semilinear elliptic problems on unbounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 93 (1982/83).

[FS] G.B. Folland - E.M. Stein, *Extimates for the complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. pure Appl. Math 27 (1974).

[GL] N. Garofalo - E. Lanconelli, *Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992).

[JL] D.S. Jerison - J.M. Lee, *Extremals of the Sobolev inequality on the Heisenberg group*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988).